OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A X- A

SUBIECTUL I

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x + 6^x = 6(x-1)^2$

prof. Florentina Dicu, prof. Adrian Bălășel , Rm Vâlcea

Rezolvare:

Împărțim ecuația prin 6 și obținem $2^{x-1} + 3^{x-1} + 6^{x-1} = (x-1)^2$

Notăm $y = x-1$ și obținem ecuația $2^y + 3^y + 6^y = y^2$ 2p

Considerăm funcția $f:(-\infty,0)\to R, f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - x^2$, strict crescătoare

Ecuația $f(y) = 0$ are soluție unică $y = -1 \Rightarrow x = 0$.....1p

Arătăm că ecuația $2^y + 3^y + 6^y = y^2$ nu are soluții pozitive folosind metoda reducerii la absurd

Presupunem că există $t \geq 0$ soluție $\Rightarrow 2^t + 3^t + 6^t = t^2$

Dar $2^t + 3^t + 6^t \geq 3 \Rightarrow t^2 \geq 3 \Rightarrow t \geq \sqrt{3} \Rightarrow [t] \geq 1$..... 1p

$[t] \leq t \Rightarrow 2^t \geq 2^{[t]} = (1+1)^{[t]} \geq 1 + [t] > t \Rightarrow 2^t > t$ 1p

$6^t > 4^t = 2^{2t} = (2^t)^2 > t^2 \Rightarrow 2^t + 3^t + 6^t > 6^t > t^2 \Rightarrow t^2 > t^2$ contradicție, deci soluția unică este $x = 0$ 2p